EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Programmiersprachen und Softwaretechnik

Prof. Klaus Ostermann

Leitung des Seminars
David Binder
Ingo Skupin

Kategorientheorie für Programmierer

Hausaufgabenblatt 4 – SS18

Tübingen, 23. Mai 2018

Aufgabe 1: Lektüre

Für die nächste Sitzung lesen Sie bitte Kapitel 10, 12 und 13 und schicken Ihre Fragen bis Dienstag Abend (also Dienstag, der 5.Juni) an uns.

Aufgabe 2: Natürliche Transformationen – Ein Beispiel

Gegeben sind folgende Definitionen für einen generischen Binärbaum:

```
data Tree a = Empty | Node a (Tree a) (Tree a)

instance Functor Tree where
  fmap _ Empty          = Empty
  fmap f (Node a l r) = Node (f a) (fmap f l) (fmap f r)

flatten :: Tree a -> [a]
flatten Empty = []
flatten (Node a l r) = a : (flatten l ++ flatten r)
```

Zeigen Sie, dass `flatten` eine natürliche Transformation vom Baum- zum Listenfunktor ist (*Hinweis:* Induktion). Sie können dabei annehmen, dass `fmap f (xs ++ ys) = fmap f xs ++ fmap f ys` gilt (mit anderen Worten: `(++)` ist eine natürliche Transformation von Paaren von Listen zu Listen).

Aufgabe 3: Natürliche Transformationen – Komposition

Beweisen Sie, dass die horizontale Komposition von natürlichen Transformationen wieder eine natürliche Transformation ergibt.

Hinweis: Betrachten Sie dazu eine alternative Definition von horizontaler Komposition. Seien dazu $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$ Kategorien und $F, F' \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sowie $G, G' \colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ Funktoren. Seien außerdem $\alpha \colon F \Rightarrow F'$ und $\beta \colon G \Rightarrow G'$ natürliche Transformationen.

Nun definieren wir neue natürliche Transformationen $G\alpha \colon G \circ F \Rightarrow G \circ F'$ mit $(G\alpha)_a := G\alpha_a$ und $\beta_{F'} \colon G \circ F' \Rightarrow G' \circ F'$ mit $(\beta_{F'})_a := \beta_{F'a}$ (diese Operationen werden auch als *Whiskering* bezeichnet). Mit deren Hilfe lässt sich nun eine alternative, äquivalente Version der horizontalen Komposition definieren: $\beta * \alpha := \beta_{F'} \circ G\alpha$ (dabei ist $*$ die horizontale und $\circ$ die vertikale Komposition von natürlichen Transformationen). Aus den angegebenen Schritten ergeben sich folgende Situationen:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \arrow[r, "G"] & \mathcal{E} \end{tikzcd} \quad \text{zusammen mit} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "G\circ F"] \arrow[r, bend right, "G\circ F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow G\alpha"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

sowie

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F'"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{E} \end{tikzcd} \quad \text{zusammen mit} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "G\circ F'"] \arrow[r, bend right, "G'\circ F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta_{F'}"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

ergeben

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "G\circ F"] \arrow[r, "G\circ F'" description] \arrow[r, bend right=60, "G'\circ F'"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow G\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow \beta_{F'}"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie nun, dass $G\alpha$, $\beta_{F'}$ und somit auch $\beta * \alpha$ natürliche Transformationen sind.

Aufgabe 4: Limits und Colimits

Sei $\mathcal{P} = 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$ die Startkategorie für Pullbacks und $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie mit allen Produkten (also auch mit einem Terminalobjekt). Finden Sie einen Funktor $D \colon \mathcal{P} \to \mathcal{C}$, sodass $\lim D = A \times B$ gilt. Oder mit anderen Worten: Zeigen Sie, dass sich Produkte durch Pullbacks definieren lassen.
Finden Sie anschließend eine Möglichkeit, Equalizer durch Pullbacks auszudrücken.
Wie verhält es sich bei Pushouts zusammen mit Coprodukten?

Sei nun $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$. Geben Sie für beliebige Mengen A, B und C sowie Funktionen $f \colon A \to C$ und $g \colon B \to C$ an, wie der Pullback dieser Funktionen aussieht.
Geben Sie ebenfalls eine allgemeine Definition des Pushouts für die Funktionen $p \colon C \to A$ und $q \colon C \to B$ an.