



Kategorientheorie für Programmierer

Hausaufgabenblatt 3 – WS19

Tübingen, 13. November 2019

Aufgabe 1: Lektüre

Für kommende Woche lesen Sie bitte Kapitel 8 und 9 und schicken Ihre Fragen bis Montag Abend an uns.

Aufgabe 2: Eindeutigkeit

Sei \mathcal{C} eine Kategorie, A und B Objekte in dieser Kategorie und P und Q seien beide jeweils Produkte von A und B mit Projektionen $p_1: P \rightarrow A$ und $p_2: P \rightarrow B$ beziehungsweise $q_1: Q \rightarrow A$ und $q_2: Q \rightarrow B$.

Zeigen Sie, dass P und Q isomorph sind.

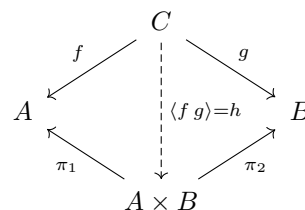
Hinweis: Der Beweis funktioniert analog zum Beweis für die Isomorphie von initialen Objekten (vgl. 5.4 im Buch) und verwendet nur die universelle Eigenschaft der beiden Produkte.

Bonus: Wie verhält es sich bei zwei Coprodukten?

Aufgabe 3: Funktoren

Sei \mathcal{C} eine beliebige Kategorie. Dann nennen wir $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ die *Produktkategorie* von \mathcal{C} mit sich selbst. Die Objekte in dieser Kategorie sind Paare (A, B) von Objekten A und B aus \mathcal{C} . Die Morphismen zwischen Objekten (A, B) und (A', B') sind Paare (f, g) von Morphismen $f: A \rightarrow A'$ und $g: B \rightarrow B'$ aus \mathcal{C} .

Für Morphismen $f: C \rightarrow A$ und $g: C \rightarrow B$, notieren wir den universellen Morphismus $h: C \rightarrow A \times B$ des Produkts $A \times B$ mit $\langle f, g \rangle$.



Dann definieren wir $f \times g: A \times B \rightarrow A' \times B'$ für $f: A \rightarrow A'$ und $g: B \rightarrow B'$ als $f \times g = \langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle$:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xleftarrow{\pi_1} & A \times B & \xrightarrow{\pi_2} & B \\
 \downarrow f & & \downarrow f \times g & & \downarrow g \\
 A' & \xleftarrow{\pi'_1} & A' \times B' & \xrightarrow{\pi'_2} & B'
 \end{array}$$

Zeigen Sie, dass $\times: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ mit $\times(A, B) := A \times B$ auf Objekten und $\times(f, g) := f \times g$ ein Bifunktor (also ein Funktor von $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ nach \mathcal{C}) ist.

Hinweis: In beiden Fällen müssen Sie die Eindeutigkeit der Morphismen der universellen Eigenschaft des Produkts verwenden. Es hilft meistens, sich die Situation anhand eines Diagramms zu verdeutlichen.